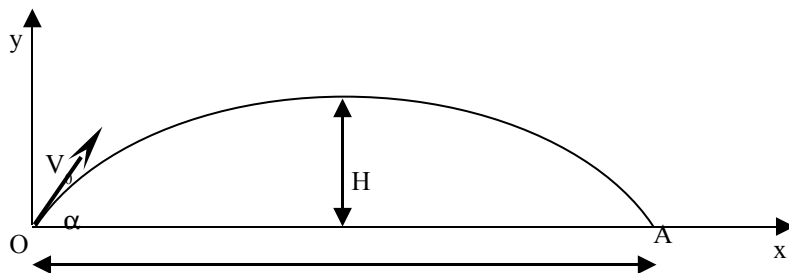


Ruch ciała pod działaniem stałej siły – Rzuty

Opiszemy ruch ciała – punktu materialnego pod działaniem stałej siły. Przyjmujemy prostokątny układ współrzędnych z początkiem w punkcie O (rys. 1).



Rys. 1 Ruch ciała pod wpływem stałej siły.

Punkt materialny jest wyrzucany pod kątem α do poziomu z prędkością V_0 (rzut ukośny). W każdej chwili czasu działa na niego siła ciężkości $Q=mg$ skierowana pionowo w dół. Prędkość początkową możemy rozłożyć na dwie składowe: poziomą – rzut na oś OX i pionową – rzut na oś OY. Zależności między nimi przedstawiają równania:

$$V_x = V_0 \cos \alpha \quad \text{oraz} \quad V_y = V_0 \sin \alpha.$$

Równania ruchu dla składowych odpowiednio: poziomej i pionowej mają postać:

$$ma_x = 0 \quad ma_y = -mg.$$

Ruch wzdłuż osi OX rozpatrujemy jako jednostajny prostoliniowy, zaś wzdłuż osi OY jako jednostajnie zmienny w polu sił grawitacyjnych i dlatego zapisujemy:

$$x = V_x t = V_0 t \cos \alpha \quad \text{oraz} \quad y = V_y t - \frac{gt^2}{2} = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \quad *.$$

Rugując czas t z powyższych równań otrzymujemy:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$$

$$y = V_0 \frac{x}{V_0 \cos \alpha} \sin \alpha - \frac{g \left(\frac{x}{V_0 \cos \alpha} \right)^2}{2}$$

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Z ostatniego równania widać, że torem ruchu będzie parabola (x w kwadracie).

Aby teraz określić położenie punktu A zakładamy $y=0$:

$$0 = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Wyznaczamy teraz z równania x :

$$x \left(\tan \alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) = 0$$

$$x = 0 \quad \wedge \quad \tan \alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x = 0$$

Pierwsze rozwiązanie $x=0$ wskazuje na początek układu współrzędnych, czyli miejsce wyrzutu, zaś drugie rozwiązanie szukamy rozwiązując równanie liniowe:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{gx}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$gx = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot 2V_0^2 \cos^2 \alpha$$

$$gx = 2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$gx = V_0^2 \sin 2\alpha$$

$$x = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = L.$$

Ostatni wzór jest zasięgiem lotu L.

Należy teraz sprawdzić dla jakiego kąta zasięg ten jest maksymalny, czyli kiedy:

$$\sin 2\alpha = 1 \quad \text{dla} \quad \alpha = 45^\circ.$$

Zasięg maksymalny wyrażamy wtedy wzorem:

$$L = \frac{V_0^2}{g}.$$

Aby znaleźć maksymalne wzniesienie punktu, czyli maksymalną wysokość lotu, należy przyrównać pochodną funkcji y względem x do zera:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha - \frac{gx}{V_0^2 \cos^2 \alpha} = 0.$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{gx}{V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{V_0^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = gx$$

$$x = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Pochodna funkcji y zeruje się w punkcie $x = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ i dlatego maksymalną swą wartość osiąga dla:

$$y = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = H.$$

Zauważmy, że gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ to równania oznaczone gwiazdką * przybierają postać:

$$y = V_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{i} \quad V_y = V_0 - gt.$$

Są to równania ruchu punktu materialnego wyrzuconego pionowo w górę. Maksymalna wysokość w takim przypadku wynosi:

$$H = \frac{V_0^2}{2g}.$$

Jeżeli kąt $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ to równania z gwiazdką * przekształcają się w:

$$y = -V_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{i} \quad V_y = V_0 - gt,$$

które opisują ruch punktu materialnego rzuconego pionowo w dół.

Jeśli w równaniach * założymy prędkość początkową równą zero, to otrzymamy:

$$y = -\frac{gt^2}{2} \quad \text{i} \quad V_y = -gt.$$

Są to równania ruchu punktu materialnego spadającego swobodnie z punktu O. Czas spadania wynosi wtedy:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Przypadek ogólny:

Objaśnienia dodatkowych oznaczeń: h_0 – wys. pocz. T – czas lotu $L = x_{\max}$ – odl. OA

