Przemiany termodynamiczne

Przemiana adiabatyczna* (nadprogramowa)

Z przemianą adiabatyczną mamy do czynienia gdy nie ma wymiany ciepła układu z otoczeniem, tzn. układ jest w osłonie adiabatycznej:

$$dQ = 0.$$

Wiemy, że:

$$dU = c_V dT,$$

czyli I Zasada Termodynamiki przybiera postać:

$$c_V \, dT + pdV = 0.$$

Przekształcając możemy zapisać:

$$\left(\frac{dT}{dV}\right)_{ad} = -\frac{p}{c_V}.$$

Jeśli teraz wyznaczymy p z równania stanu gazu i podstawimy do powyższego równania to otrzymamy:

$$p = \frac{RT}{V},$$

$$dT = -\frac{RT}{Vc_V} dV.$$

Po wykonaniu rozdzielenia zmiennych mamy:

$$\frac{1}{T} dT = -\frac{R}{c_V} \frac{1}{V} dV,$$

co po całkowaniu:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT = -\frac{R}{c_V} \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV$$

daje nam wynik:

$$\ln T_2 - \ln T_1 = -\frac{R}{c_V}\left(\ln V_2 - \ln V_1\right).$$

Korzystając z właściwości logarytmów otrzymujemy:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{R}{c_V}}.$$

Wiemy jednak, że:

$$R = c_p - c_V,$$

więc przekształcając możemy doprowadzić do postaci:

$$\frac{-c_p + c_V}{c_V} = -\frac{c_p}{c_V} + 1.$$

Podstawiamy teraz:

$$\frac{c_p}{c_V} = \chi,$$

gdzie:

$$\chi = \frac{f+2}{f},$$

przy czym f jest liczbą stopni swobody. (Np. 5/3 – dla gazów jednoatomowych, 7/5 – dla gazów dwuatomowych, 4/3 – dla gazów wieloatomowych.

Ostatecznie otrzymujemy równanie adiabaty:

$$T_2 V_2^{\chi - 1} = T_1 V_1^{\chi - 1} = const.$$

Korzystając z równania stanu gazu i uogólniając powyższe równanie możemy zapisać:

$$p = RT,$$

$$T = \frac{pV}{R},$$

$$\frac{pV^{\chi}}{R} = const.,$$

$$pV^{\chi} = const.$$

Możemy również podobnie wyprowadzić jeszcze jedną postać równania adiabaty:

$$V = \frac{RT}{p},$$

$$T\left(\frac{RT}{p}\right)^{\chi} = const.,$$

$$T^{\chi}\left(\frac{R}{p}\right)^{\chi-1} = const.,$$

$$\frac{T^{\chi}}{p^{\chi-1}} = const.$$

A oto tzw. postać różniczkowa adiabaty:

$$T^{\chi} p^{1-\chi} = const.$$

Aby obliczyć pracę wykonaną przy przemianie adiabatycznej postępujemy podobnie jak w poprzednich przemianach. Rachunki są tu jednak bardziej skomplikowane. Pozostawiam całe wyprowadzenie bez komentarzy:

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV$$

$$pV^{\chi} = p_1 V_1^{\chi} \Rightarrow p = p_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^{\chi}$$

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^{\chi} dV$$

$$W = -p_1 V_1^{\chi}\int_{V_1}^{V_2} V^{-\chi} dV$$

$$W = -p_1 V_1^{\chi} \cdot \left.\frac{V^{-\chi+1}}{-\chi+1}\right|_{V_1}^{V_2}$$

$$W = p_1 V_1^{\chi}\left(V_2^{-\chi+1} + V_1^{-\chi+1}\right)\frac{1}{-\chi+1}$$

$$W = \frac{-p_1V_1 - p_1V_1^{\chi}V_2^{-\chi+1}}{-\chi+1}$$

$$W = \frac{RT_1 - p_2V_2^{\chi}V_2^{-\chi+1}}{-\chi+1}$$

$$W = R\frac{T_1 - T_2}{-\frac{R}{c_v}}$$

$$W = (T_2 - T_1)c_V$$

Jeśli praca wykonana jest przy adiabatycznym rozprężaniu to wykonana jest ona przez gaz, więc piszemy ją ze znakiem minus:

$$W < 0,$$

co oznacza, że powoduje to obniżenie temperatury:

$$T_2 < T_{1.}$$

Wynika z tego, że następuje zmniejszenie energii wewnętrznej układu:

$$W = \Delta U < 0.$$