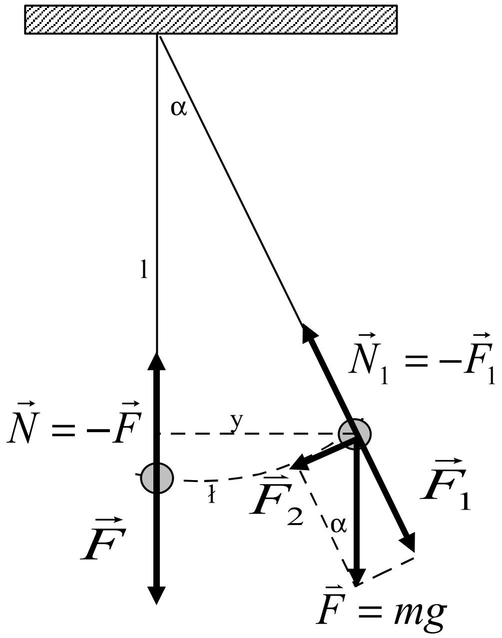
Wahadło matematyczne

Wahadłem matematycznym nazywamy układ składający się z nierozciągliwej długiej (długość l) nici o pomijalnej masie oraz zawieszonej na tejże nici masie m będącej punktem materialnym tzn. nie mającej swych rozmiarów geometrycznych.



Z rysunku widać, że w położeniu równowagi siła naciągu nici $\vec{N}$ równoważy działanie siły grawitacji $\vec{F}$. Natomiast w drugim położeniu zrównoważona jest jedynie składowa $\vec{F}_1$ siły grawitacji. składowa $\vec{F}_2$, zwrócona jest w stronę położenia równowagi i to ona powoduje ruch powrotny wahadła. Z rysunku widać, że składowa F_2 ma wartość:

$$F_2 == mg\sin\alpha\,.$$

Po prawej stronie równania występuje znak minus, ponieważ siła ma znak przeciwny do wychylenia *y*. Wiedząc, że nić jest bardzo długa, możemy przyjąć, że wychylenia są niewielkie czyli kąt α jest mały. Wówczas sinus tego kąta jest w przybliżeniu równy wartości kąta w mierze łukowej, a łuk *l* jest praktycznie równy wychyleniu *y* czyli:

$$\sin\alpha \approx \frac{y}{l}\,.$$

Zatem

$$F_2 \approx= -mg\frac{y}{l}\,.$$

Na podstawie II prawa Newtona mamy:

$$ma = m\frac{dv}{dt} = -mg\frac{y}{l}$$

lub

$$\frac{dv}{dt} + \frac{g}{l}y = 0\,.$$

Powyższy wzór ma postać równania oscylatora harmonicznego.
Pisząc wychylenie jako:

$$y = A\sin\omega t$$

i wiedząc, że:

$$F = ma = -m\omega^2 y$$

możemy zapisać:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Wyznaczając T otrzymujemy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

co oznacza, że *okres drgań wahadła matematycznego zależy tylko od wartości przyspieszenie ziemskiego g i długości nici l. Okres ten nie zależy ani od masy zawieszonej na nici, ani od amplitudy drgań! Tę właściwość nazywamy izochronizmem.*