

Zderzenia ciał

1. Zderzenia sprężyste

Rozpatrzmy zderzenia sprężyste dla kul o masach m_1 i m_2 oraz ich prędkości przed zderzeniem v_1 i v_2 . Chcemy obliczyć prędkości u_1 i u_2 obu kul po zderzeniu. Zderzenie sprężyste charakteryzuje się tym, że energia kinetyczna przed zderzeniem równa się energii kinetycznej po zderzeniu:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2. \quad [1]$$

Zderzające się kule traktujemy jako układ odosobniony, czyli taki, w którym działają tylko siły wewnętrzne. Obowiązuje więc zasada zachowania pędu:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2. \quad [2]$$

Ze wzoru [1] otrzymujemy:

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2), \quad [3]$$

a ze wzoru [2] mamy:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2). \quad [4]$$

Dzieląc stronami równania otrzymujemy:

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2, \quad [5]$$

skąd mamy:

$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2. \quad [6]$$

Podstawiając do równania [4] mamy:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(v_1 + u_1 - 2v_2), \quad [7]$$

$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}. \quad [8]$$

Wracając do równania [6] otrzymujemy:

$$u_2 = \frac{(v_1 - v_2)(m_1 + m_2) + 2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad [9]$$

ostatecznie mamy:

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}. \quad [10]$$

Przechodzimy teraz do szczególnych przypadków zderzeń sprężystych:

a) Niech $m_1 = m_2$, czyli kule mają jednakowe masy. Wtedy ze wzorów [8] i [10] wynika:

$$u_1 = v_2 \quad i \quad u_2 = v_1, \quad [11]$$

czyli kule o jednakowych masach wymieniają wzajemnie swe prędkości.

b) Zakładamy, że druga kula przed zderzeniem jest nieruchoma, czyli $v_2 = 0$. Wtedy otrzymujemy:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Jeśli dodatkowo masy są równe, czyli $m_1 = m_2$ to mamy:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = v_1.$$

c) Gdy druga kula ma masę znacznie większą od pierwszej i jest nieruchoma, czyli gdy $m_1 \ll m_2$ i $v_2 = 0$, wtedy:

$$u_1 = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_1, \quad u_2 = \frac{2 \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_1.$$

Jeżeli założymy, że $m_2 \rightarrow \infty$ (zagadnienie odbicia od ściany), to:

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} \frac{m_1}{m_2} = 0, \quad u_1 \rightarrow -v_1, \quad u_2 = 0.$$

Wynika z tego, że po zderzeniu kula o dużej masie (ściana) pozostaje nadal nieruchoma, zaś mniejsza porusza się z tą samą prędkością lecz zwróconą przeciwnie.

d) Jeżeli $m_1 \gg m_2$, a równocześnie $v_2 = 0$, to:

$$u_1 = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1, \quad u_2 = \frac{2v_1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

Jeśli dodatkowo założymy, że $m_1 \rightarrow \infty$, to:

$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} \frac{m_2}{m_1} = 0,$$

a wtedy:

$$u_1 \rightarrow v_1 \quad i \quad u_2 \rightarrow 2v_1.$$

Oznacza to, że po zderzeniu kuli o bardzo dużej masie z nieruchomą kulką o masie małej, praktycznie biorąc kula duża zachowuje swą prędkość pierwotną, a kulka mała odskakuje z prędkością dwa razy większą od prędkości kuli dużej.

2 Zderzenia niesprężyste

Ten rodzaj zderzeń rozpatrzmy na przykładzie dwóch ciał niesprężystych o masach m_1 i m_2 oraz o prędkościach przed zderzeniem v_1 i v_2 . Niech obie prędkości mają te same kierunki i v_1 niech będzie większe od v_2 , czyli niech ciało pierwsze dogania drugie. Po zderzeniu, jak wiemy, następuje trwałe odkształcenie obu ciał i biegają one jako jedna bryła z prędkością u .

W czasie tego zderzenia nie działają w układzie odosobnionym siły zachowawcze, a zatem nie stosuje się zasada zachowania energii mechanicznej. Stosuje się zasada zachowania pędu:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u .$$

Stąd prędkość wspólna obu ciał po zderzeniu równa się:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} .$$

Znając energię kinetyczną obu ciał przed zderzeniem, jak również energię kinetyczną bryły utworzonej w wyniku zderzenia, można obliczyć stratę energii kinetycznej $\Delta E_k = E$, przekształconą na inne postacie energii:

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} .$$

Po uwzględnieniu powyższych rozważań otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 .$$

Czynnik $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ przedstawia tzw. *masę zredukowaną*.